

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA E INFORMATICA

TESI DI LAUREA

Metodi geometrici per l'identificazione
di modelli di stato

RELATORE: Ch.mo Prof. G.PICCI

LAUREANDO: STEFANO BERTONCELLO info.1@eleon.it

ANNO ACCADEMICO 1994-95

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 0 | Introduzione | 7 |
| 1 | Fondamenti | 13 |
| 1.1 | Introduzione | 13 |
| 1.2 | Stazionarieta' | 13 |
| 1.3 | Splitting subspaces | 18 |
| 1.3.1 | Sull'unicita' dello splitting subspace minimale | 23 |
| 1.4 | Modelli a variabili di stato per processi stazionari | 26 |
| 1.5 | Fattorizzazione spettrale | 36 |
| 1.6 | Relazione tra fattori spettrali e spazi di stato | 48 |
| 1.7 | Ordinamento e scelta uniforme delle basi in \mathcal{X} | 49 |
| 2 | Processi stocastici | 53 |
| 2.1 | Introduzione | 53 |
| 2.2 | Il problema della realizzazione parziale minimale | 54 |
| 2.2.1 | Il metodo di Ho-Kalman | 55 |
| 2.2.2 | Il problema della positivita' | 59 |
| 2.2.3 | Scelta della fattorizzazione della matrice di Hankel | 61 |
| 2.3 | Bilanciamento stocastico | 62 |
| 2.4 | Realizzazione su intervallo finito | 69 |
| 2.5 | Riduzione stocastica del modello | 74 |
| 2.6 | Descrizione stazionaria del modello | 75 |
| 2.7 | Algoritmi geometrici di identificazione | 76 |
| 2.7.1 | Algoritmo di Ho Kalman | 81 |
| 2.7.2 | Osservazioni sulla scelta delle basi degli spazi di stato | 83 |
| 2.7.3 | Equivalenza tra metodi geometrici e metodo di Ho-Kalman | 85 |
| 2.7.4 | Metodi basati sulle proiezioni ortogonali | 88 |
| 2.7.5 | Metodi basati sulla matrice di osservabilita' | 89 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Algoritmi di identificazione | 91 |
| 3.1 | Introduzione | 91 |
| 3.2 | Lo spazio di Hilbert di un segnale stazionario | 92 |
| 3.3 | Consistenza del metodo di Ho-Kalman | 93 |
| 3.4 | Strumenti numerici | 94 |
| 3.4.1 | Fattorizzazione LQ | 94 |
| 3.4.2 | Decomposizione SVD | 97 |
| 3.4.3 | Decomposizione GSVD | 99 |
| 3.4.4 | Proiezioni ortogonali e oblique | 105 |
| 3.5 | Algoritmo di Ho Kalman | 106 |
| 3.6 | Algoritmo di Van Overschee e De Moor | 109 |
| 3.7 | Variante proposta da Lindquist | 113 |
| 3.8 | Algoritmo senza l'uso di GSVD | 115 |
| 3.9 | Interpretazione geometrica del metodo di Ho Kalman | 118 |
| 3.10 | Metodo approssimato | 122 |
| 3.11 | Applicazione pratica | 126 |
| 3.11.1 | Fattorizzazione LQ della matrice dei dati | 126 |
| 3.11.2 | Un esempio pratico di identificazione | 129 |
| 4 | Sistemi deterministici | 159 |
| 4.1 | Introduzione | 159 |
| 4.2 | Proprieta' geometriche dei sistemi deterministici | 161 |
| 4.2.1 | Assenza di reazione e causalita' stocastica | 161 |
| 4.2.2 | Metodo proposto da Moonen, De Moor, Vandenberghe, Vandewalle | 164 |
| 4.2.3 | Metodo proposto da Van Overschee e De Moor | 171 |
| 4.2.4 | Applicazione pratica | 178 |
| 5 | Sistemi stocastici con ingressi esogeni | 179 |
| 5.1 | Introduzione | 179 |
| 5.2 | Proprieta' geometriche e metodi di identificazione | 180 |
| 5.2.1 | Assenza di reazione e causalita' stocastica | 180 |
| 5.2.2 | Caratterizzazione dello stato | 184 |
| 5.2.3 | Filtro di Kalman non causale | 186 |
| 5.2.4 | filtro di Kalman causale | 189 |
| 5.2.5 | Decomposizione dello stato del processo congiunto | 191 |
| 5.2.6 | Decomposizione con dati finiti | 193 |
| 5.3 | Metodi proposti da Van Overschee e De Moor | 193 |
| 5.3.1 | Metodo esatto | 198 |
| 5.3.2 | Metodo approssimato | 200 |
| 5.3.3 | Realizzazione pratica | 202 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.4 | Identificazione della sola parte deterministica | 205 |
| 5.4.1 | Realizzazione pratica | 209 |
| 5.5 | Applicazione pratica | 213 |
| 6 | Appendice - Funzioni Matlab | 239 |

0

Introduzione

Per identificazione di un sistema si intende quel complesso di operazioni che, a partire da una sequenza di rilevazioni sperimentali di variabili misurabili, permette di ottenerne una descrizione sotto forma di rappresentazione di un sistema dinamico che ha generato i dati disponibili.

La teoria della identificazione si occupa della formulazione di algoritmi per la costruzione automatica di modelli a partire dai dati osservati.

In questa tesi si considererà esclusivamente il caso in cui i dati disponibili siano prodotti da un unico esperimento non preparabile. In altre parole, si suppone che non sia possibile stabilire le condizioni sperimentali o gli ingressi del sistema sotto esame. Inoltre si prenderanno in considerazione solo quegli algoritmi che operano fuori linea, cioè che effettuano i calcoli previsti su una base di dati già acquisita nel momento in cui si opera.

L'interesse per la teoria della identificazione in campo ingegneristico è dovuto alla possibilità di ottenere un modello di un fenomeno astraendo completamente dalle leggi fisiche che lo governano. In tal modo è possibile decidere sia la struttura che la complessità della rappresentazione dello stesso, con indubbi vantaggi dal punto di vista pratico.

Gli aspetti che in questa sede interessano maggiormente sono quelli della predizione e del controllo. Nel caso della predizione si vuole ottenere una descrizione dei dati disponibili che permetta di fornire una previsione ragionevole sui valori che saranno assunti dalle variabili sottoposte a misura in un futuro più o meno lontano. Nel caso del controllo si desidera disporre di una rappresentazione matematica del sistema incognito dal quale sono stati prelevati i dati, in modo tale che agendo sulle variabili manipolabili si riesca ad imporre alle variabili controllate un comportamento ottimale secondo un criterio prestabilito.

Per affrontare con successo i problemi della predizione e del controllo, è opportuno fissare una classe di modelli dei dati che soddisfi a determinati

requisiti.

Innanzitutto, occorre una descrizione di come il comportamento futuro delle variabili sotto esame dipenda dall'evoluzione passata delle stesse. Inoltre, interessa trovare una rappresentazione che permetta di descrivere contemporaneamente la dinamica di più variabili. Per questo motivo è opportuno ricorrere a modelli di stato.

Affinché il modello determinato in base ai dati disponibili sia significativo per la descrizione del comportamento futuro delle variabili esaminate, è necessario supporre che il meccanismo di generazione dei dati rimanga invariato. Pertanto, ci si limiterà a ricercare rappresentazioni stazionarie.

La scelta di descrivere matematicamente i dati osservati come campioni temporali di processi aleatori trova giustificazione nella impossibilità di fornire una descrizione completa di tutti i meccanismi che influenzano il comportamento di un generico sistema fisico. Questo comporta che di un qualsiasi fenomeno si riescano a mettere in evidenza solo quegli aspetti che si ritengono rilevanti per la soluzione di un determinato problema. Tutte le interazioni interne ad un sistema, e tra il sistema e l'ambiente, che non si sono potute o volute descrivere, intervengono nel modello sotto forma di variazioni aleatorie dei parametri che individuano il modello stesso. Per quantificare la bontà di una rappresentazione dei dati è necessario fornire una descrizione quantitativa delle incertezze a cui è soggetta. Scegliendo di descrivere i segnali come traiettorie di processi stazionari si possono quantificare le incertezze in modo molto semplice come rumori additivi.

Il tipo di rappresentazioni che si vuole utilizzare per descrivere i dati osservati è quello dei modelli a variabili di stato, stazionari, a tempo discreto, a dimensione finita. Questi modelli sono adatti alla implementazione digitale delle tecniche di predizione e controllo.

In questa tesi ci si è occupati dei *metodi geometrici*, detti anche *subspace methods*, per l'identificazione di modelli di stato. L'ambito in cui si opera prevede di interpretare i dati osservati come campioni temporali di processi aleatori stazionari. Ottenere una descrizione di tali processi equivale a descrivere i dati a disposizione. Si cercherà, ora, di descrivere brevemente i principi fondamentali che hanno portato alla formulazione dei metodi geometrici di identificazione.

È noto che nell'ambito della stima bayesiana lineare è utile introdurre una particolare struttura algebrica in cui la stima sia interpretabile come una semplice operazione geometrica di proiezione ortogonale. Tale struttura si costruisce sull'insieme delle variabili aleatorie reali, a media nulla e a varianza finita, definite sullo stesso spazio di probabilità. Se si introduce l'operazione

di prodotto interno tra variabili aleatorie come calcolo della relativa covarianza, questo insieme puo' essere dotato di una struttura di spazio vettoriale di Hilbert.

Un sottospazio particolarmente interessante e' quello generato dai campioni aleatori di un processo stocastico stazionario. Tale spazio e' isometricamente isomorfo ad un altro spazio di Hilbert, generato a partire da sequenze semi-infinite di campioni temporali di una traiettoria del processo. Questo permette di trasferire il problema della identificazione dall'ambito in cui si opera direttamente sui dati a quello in cui si opera su variabili aleatorie, e riportare i risultati ottenuti in questo al precedente mantenendo lo stesso formalismo.

I benefici dell'approccio statistico al problema della identificazione sono notevoli. Infatti e' possibile ricostruire, mediante semplici operazioni geometriche di proiezione ortogonale, uno spazio di stato per il processo aleatorio che ha generato i dati. Dallo spazio di stato e' possibile, sempre operando geometricamente, ricavare alcune matrici della rappresentazione a variabili di stato del processo. Infine, risolvendo una equazione di Riccati, si arriva alla rappresentazione completa.

I metodi geometrici di identificazione dei modelli di stato godono di alcune peculiarita' che li rendono particolarmente interessanti. Innanzi tutto permettono di trattare in modo naturale il caso multivariabile, dato che il problema della identificazione viene formulato direttamente in funzione delle matrici del modello di stato. Questo e' un indubbio vantaggio rispetto ai metodi tradizionali che si occupano quasi esclusivamente di sistemi SISO. Un secondo vantaggio dei metodi geometrici e' l'utilizzo di strumenti di calcolo non iterativi e numericamente robusti. Questo permette di ridurre drasticamente la complessita' di calcolo richiesta rispetto ai metodi tradizionali, iterativi. Un altro vantaggio e' la correttezza asintotica dei metodi di identificazione. In altre parole, se si disponesse di infiniti dati e se il modello "vero" del sistema appartenesse alla classe considerata, sarebbe possibile ricavare le matrici esatte della rappresentazione cercata. Nei metodi tradizionali, invece, la stima dei parametri e' affidata alla minimizzazione di una funzione costo. E' ben noto che tale operazione puo' condurre a stime non corrette a causa della convergenza a minimi locali lontani dai minimi assoluti, condizione difficilmente rilevabile.

I contributi alla teoria geometrica della identificazione sono numerosi, anche se relativamente recenti. Questo tipo di procedure sembra essere stato proposto da Faurre [4]. Si vedano anche [5, 6]. Lavori piu' recenti, basati sull'analisi alle correlazioni canoniche proposta da Akaike [1] (o su qualche

altra decomposizione ai valori singolari) e sull'algoritmo di Ho-Kalman [7], sono dovuti ad Aoki [2], Larimore [16, 24], e a Van Overschee e De Moor [11]. Uno studio della teoria geometrica della rappresentazione dei processi aleatori e delle problematiche relative alla identificazione si puo' trovare nelle numerose pubblicazioni del Prof. Picci. Si vedano, ad esempio, [27, 21, 28, 14] da cui sono tratti quasi tutti i risultati teorici riportati nei capitoli 1 e 2, e in cui si puo' trovare una esauriente bibliografia.

Questo per quanto riguarda l'identificazione di serie temporali. Nel caso di sistemi con ingressi esogeni, alcuni lavori di riferimento sono quelli di Moonen, De Moor, Vandenberghe e Vandewalle [12], Verhaegen [22], Van Overschee e De Moor [13, 26]. Nelle pubblicazioni citate e' poco chiara l'interpretazione statistica dei risultati. Questo e' dovuto al fatto che i vari autori operano direttamente sui dati disponibili. Tale interpretazione viene fornita in questa tesi, si spera in modo esauriente. Alcuni risultati teorici relativi alla caratterizzazione dello stato nei sistemi deterministici sono dovuti al Prof. Picci e si possono trovare in [15].

Gli obiettivi che ci si propone di raggiungere con questa tesi sono i seguenti:

- raccogliere i principali risultati teorici che hanno portato alla formulazione degli algoritmi di identificazione di tipo geometrico, sia per le serie temporali che per i sistemi con ingressi esogeni
- descrivere i principali algoritmi attualmente disponibili, approfondendo alcuni passaggi non sufficientemente chiari negli articoli d'origine
- dare una interpretazione statistica degli algoritmi proposti nelle pubblicazioni considerate
- chiarire l'utilizzo dei vari strumenti numerici impiegati negli algoritmi considerati
- proporre, se possibile, metodi di identificazione alternativi
- presentare la realizzazione pratica dei vari algoritmi proposti in letteratura, e i risultati dell'applicazione di tali algoritmi ai dati forniti da un sistema simulato, confrontando quei metodi che dal punto di vista teorico sono equivalenti, ma che hanno diverse implementazioni numeriche

La tesi si può dividere in due parti. La prima tratta la teoria della identificazione relativa alle serie temporali, ed è suddivisa nei capitoli 1, 2 e 3. La seconda si occupa della identificazione di sistemi con ingressi esogeni, nell'ipotesi di assenza di reazione, ed è suddivisa nei capitoli 4 e 5.

Nel capitolo 1 si affronta il problema della rappresentazione dei dati disponibili. Si vede, innanzi tutto, come si arriva all'ipotesi fondamentale che i dati siano campioni di una traiettoria di un processo stocastico stazionario, puramente non deterministico, a media nulla e a densità spettrale razionale. Quindi si propongono alcuni risultati relativi ai cosiddetti *splitting subspaces*, cioè particolari spazi che giocheranno un ruolo fondamentale nella teoria geometrica della identificazione. Si illustrano, poi, i principali risultati sulla rappresentazione di un processo stazionario, sia dal punto di vista geometrico, utilizzando modelli a variabili di stato, sia dal punto di vista classico, utilizzando i fattori spettrali. In particolare si affronta il problema della ricerca della rappresentazione minimale e si evidenzia la non unicità di quest'ultima. Infine si vedono i legami esistenti tra le rappresentazioni minimali.

Nel capitolo 2 si affronta il problema della identificazione. Dapprima si vede come tale problema può essere risolto utilizzando la teoria della realizzazione parziale minimale di una sequenza finita di matrici covarianza. Si riportano, poi, alcune considerazioni sui problemi di positività della rappresentazione, spesso trascurate in letteratura. Successivamente si descrivono le motivazioni della scelta del bilanciamento stocastico di una rappresentazione, cioè della scelta di una particolare descrizione tra quelle possibili. Si affronta quindi il problema della scelta di una rappresentazione del processo che sia valida su un intervallo finito, e dalla quale sia possibile ricavare una descrizione stazionaria dello stesso. Infine, si introducono le linee guida per lo sviluppo dei metodi geometrici. In particolare, si propongono alcune osservazioni sulle modalità di scelta delle basi negli spazi di stato. Si propone, inoltre, una dimostrazione del fatto che i metodi geometrici sono perfettamente equivalenti al metodo di realizzazione parziale di Ho-Kalman.

Nel capitolo 3 vengono applicate le nozioni teoriche presentate nei capitoli precedenti. Innanzi tutto si giustifica la possibilità di applicare i risultati teorici, in cui intervengono grandezze aleatorie, ai dati disponibili, semplicemente associando ad ogni variabile aleatoria una sequenza di campioni temporali e utilizzando per i calcoli le stesse relazioni formali. Inoltre si riportano i risultati di consistenza dei metodi, che assicurano la convergenza asintotica delle stime. Successivamente si studiano gli strumenti numerici che saranno utilizzati nella implementazione dei vari metodi. Si propongono delle interpretazioni geometriche di tali strumenti. In particolare si analizza la GSVD, che solo recentemente è stata utilizzata come strumento di calcolo nei metodi di identificazione, e se ne propone una interpretazione geometrica e una im-

plementazione numerica. Si presentano, poi, alcuni metodi di identificazione, di ognuno dei quali si propone una realizzazione numerica. In particolare, si propone un algoritmo che migliora le prestazioni, dal punto di vista del costo computazionale, degli algoritmi proposti in letteratura. Inoltre, si propone un secondo algoritmo che, pur essendo teoricamente equivalente agli altri, si avvale di una impostazione teorica leggermente diversa che dovrebbe renderlo conveniente per problemi di grandi dimensioni. Infine, si riportano i risultati dell'applicazione pratica dei vari algoritmi ad un semplice sistema simulato. In particolare, si propongono dei metodi alternativi per la fattorizzazione LQ della matrice dei dati. Si propone, inoltre, una giustificazione del fatto che in alcuni casi le prestazioni dei metodi geometrici sono scadenti.

Nel capitolo 4 si tratta l'identificazione di sistemi con ingressi esogeni nel caso teorico di assenza di rumori. Si evidenzia come sia indispensabile l'ipotesi di assenza di reazione per poter ottenere modelli del tipo desiderato. Quindi si riportano i risultati teorici relativi alla caratterizzazione dello spazio di stato della rappresentazione. Per ogni caratterizzazione dello stato si descrivono i metodi proposti per la sua determinazione e per il calcolo delle matrici del modello. Infine si propone la realizzazione pratica dei vari metodi. In particolare si propone un metodo alternativo per il calcolo dell'intersezione di spazi, che fa uso della GSVD.

Nel capitolo 5 si affronta il problema più realistico della identificazione di sistemi con ingressi esogeni in presenza di rumori. Anche in questo caso si evidenzia come l'ipotesi di assenza di reazione sia fondamentale per l'esistenza di un modello a variabili di stato del tipo cercato, osservazione raramente riportata in letteratura. Si riportano alcuni risultati teorici riguardanti la rappresentazione a variabili di stato dei sistemi considerati. In particolare, si propone una possibile caratterizzazione dello spazio di stato e si ricava una particolare rappresentazione del sistema valida su un intervallo finito. Quindi si riporta il metodo proposto in letteratura per l'identificazione di sistemi con ingressi esogeni, e la relativa realizzazione. Successivamente, si illustra come sia possibile identificare il sottosistema la cui dinamica dipende esclusivamente dagli ingressi, e si propongono due possibili algoritmi di identificazione e le relative realizzazioni. Infine, si riportano i risultati dell'applicazione pratica degli algoritmi proposti.